ANALISI II ING. INFORMATICA 2022-2023 (591AA) - APPELLO IV, SETTEMBRE 2023

15/09/2023

Nome e cognome:____

Matricola:____

Durata: 2 ore. Nessun materiale è consultabile.
Nessun device deve essere usato.

Esercizio 1.

(a) Dare la definizione di punto di massimo locale per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$.

(b) Si consideri la funzione $f(x, y) = x + y$. Si calcolino i punti di massimo e minimo per f soggetta al vincolo $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 4 = 0$.

Esercizio 2. Si calcolino i coefficienti della serie di Fourier associati alla funzione definita su $[0, 2\pi]$ da $f(x) = e^x$. Dire, giustificandolo, se la serie di Fourier converge a e^x nei punti interni $(0, \pi)$.

Esercizio 3.
Verificare che per la funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y + \sin z$$

vale il Teorema del Dini nel punto $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, in particolare che implicitamente z può essere scritta come funzione di (x, y). Dare l'equazione del piano tangente a $z(x, y)$ nel punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Esercizio 4.

(a) Enunciare il Teorema del Rotore (detto anche Teorema di Stokes).

(b) Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale $F(x, y, z) = (y, x, z)$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 = x^2 + z^2,\ y \in [0, 1]\}.$$

Soluzioni

1a. (x_0, y_0) si dice di massimo locale per f se esiste un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ contenente il punto tale che $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ per ogni $(x,y) \in A$.

1b. Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si ha

$$\begin{cases} 1 = \lambda(6x - 2y) \\ 1 = \lambda(6y - 2x) \\ 0 = 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 4 \end{cases}.$$

Dalle prime due equazioni si ricava $x = y = \frac{1}{4\lambda}$, quindi dalla terza $\lambda = \pm\frac{1}{4}$, da cui $(x,y) = (1,1)$ e $(x,y) = (-1,-1)$. $f(1,1) = 2$ e $f(-1,-1) = -2$, quindi il primo è punto di massimo, il secondo di minimo.

2. I coefficienti sono definiti da

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \cos(nx)\,dx, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \sin(nx)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\left(e^x \cos(nx)|_0^{2\pi} + n\int_0^{2\pi} e^x \sin(nx)\,dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(e^{2\pi} - 1 + n\left(e^x \sin(nx)|_0^{2\pi} - n\int_0^{2\pi} e^x \cos(nx)\,dx\right)\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(e^{2\pi} - 1 - n^2\int_0^{2\pi} e^x \cos(nx)\,dx\right), \end{aligned}$$

quindi

$$a_n = \frac{1}{\pi}\frac{e^{2\pi} - 1}{1 + n^2}.$$

Similmente si ha

$$b_n = \frac{n(1 - e^{2\pi})}{\pi(1 + n^2)}.$$

Si ha convergenza della serie alla funzione stessa nei punti interni poiché f è continua.

3. La funzione è C^1. Inoltre, $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, $\partial_z f(x,y,z) = \cos z$, che valutata in (x_0, y_0, z_0) vale $\partial_z f(0,0,0) = 1 \neq 0$, pertanto valgono le ipotesi del Teorema del Dini, quindi esiste $z = z(x,y)$ tale che $f(x,y,z(x,y)) = 0$ in un intorno di $(x_0, y_0) = (0,0)$, $z(0,0) = 0$, con z derivabile con derivate

$$\partial_x z(x,y) = -\frac{\partial_x f}{\partial_z f}, \quad \partial_y z(x,y) = -\frac{\partial_y f}{\partial_z f}.$$

In particolare $\partial_x z(0,0) = 0$ e $\partial_y z(0,0) = -1$. Quindi l'equazione del piano tangente a $z(x,y)$ nel punto $(0,-1)$ è

$$z = z_0 + \langle \nabla z(x_0,y_0), (x - x_0, y - y_0)\rangle = -y.$$

4a. Sia Σ superficie regolare orientabile con bordo $\partial^+\Sigma$ orientato positivamente, e quest'ultimo unione di curve regolari, con vettore tangente T. Allora, per un campo F di classe $C^1(\Sigma)$, si ha

$$\iint_\Sigma \nabla \times F \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial^+\Sigma} F \cdot T \, ds$$

4b. Poiché $\nabla \times F = (0,0,0)$, si ha che il flusso è nullo.
Alternativamente, utilizzando il Teorema del punto precedente, abbiamo che il flusso del rotore è uguale alla circuitazione del campo lungo il bordo di Σ orientato in senso positivo. La superficie Σ è un cono con asse verticale lungo l'asse y e vertice $(0,0,0)$, di altezza 1. Il bordo è pertanto la circonferenza unitaria centrata in $(0,0)$ che vive sul piano $y = 1$. Una parametrizzazione è data da $\gamma(t) = (\cos\theta, 1, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. La giusta orientazione è col senso di percorrenza orario, quindi il flusso è dato da

$$-\int_0^{2\pi} (1, \cos\theta, \sin\theta)(-\sin\theta, 0, \cos\theta) \, d\theta = 0.$$

Ciò è chiaramente in accordo con il risultato ottenuto calcolando esplicitamente il rotore del campo assegnato.